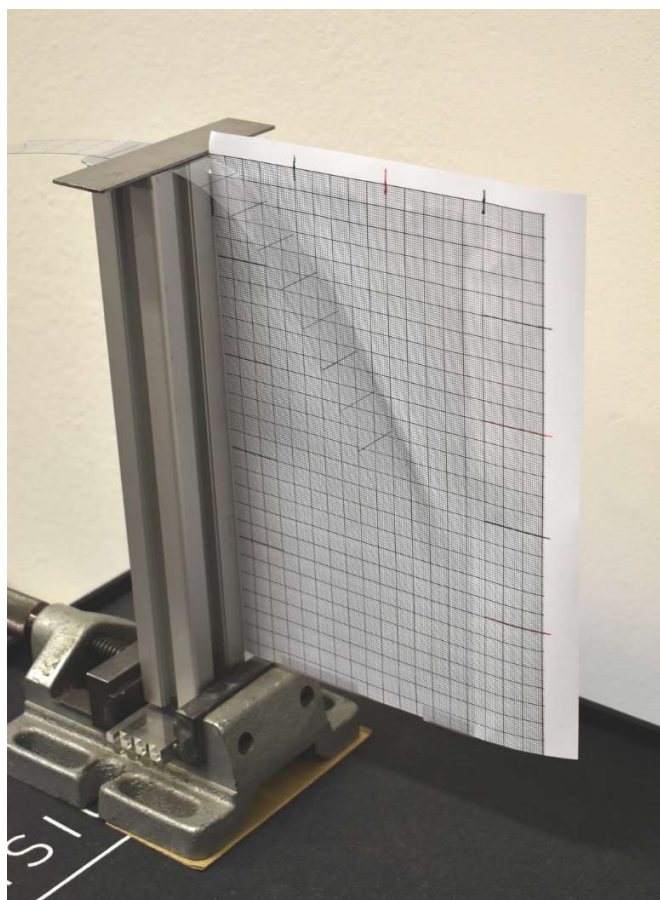


Merjenje Young-ovega modula tankih filmov

Cilj laboratorijske vaje je spoznati postopek, s katerim je mogoče relativno enostavno izmeriti Young-ov modul tankega filma. Postopek vključuje enostavno odčitavanje premikov vnaprej označenih točk na preizkušancu, uporabo teorijo velikih premikov in reševanje nelinearne diferencialne enačbe z metodo kolokacije v programskem paketu Mathematica.



Na zgornji sliki je prikazan enostaven eksperimentalni sistem, ki ga bomo uporabili za določitev Young-ovega modula tankega filma. V našem primeru bo preizkušane izrezan iz prozorne folije za spiralno vezavo. Preizkušane naj bo zaradi enostavnosti izračunov pravokotne oblike. Vpet naj bo konzolno, obremenjen samo z lastno težo in dovolj dolg, da lahko na njem opazimo zadostno velike premike. Relativna napaka pri odčitavanju bo tako manjša. Izvesti je potrebno meritve pri različnih dolžinah nosilca. Predhodno je potrebno izmeriti še dimenzije nosilca in njegovo težo na enoto dolžine. Debelino in maso folije nosilca izmerite na svežnju folij.



Za določitev Young-ovega modula je potrebno rešiti nelinearno diferencialno enačbo,

$$\frac{d^2\theta(s)}{ds^2} EI + q_0(L - s) \cos(\theta(s)) = 0$$

katere podrobna izpeljava je podana v nadaljevanju. Reševali jo bomo numerično, s pomočjo programskega paketa Mathematica. Pri tem bomo uporabili metodo kolokacije, s katero bomo prevedli zgornjo nelinearno diferencialno enačbo na sistem navadnih nelinearnih enačb. V izračunih bo edina neznanka Young-ov modul. Poiščete ga tako, da se izračunane in izmerjene koordinate posameznih točk čim boljše ujemajo. Program dobite na naslovu:

http://lab.fs.uni-lj.si/lanem/documents/VT_LV2_izracun_kolokacija.nb

Opomba: v Mathematici je možno zgornjo nelinearno diferencialno enačbo rešiti tudi z uporabo funkcije NDSolve.

Meritve:

Širina folije w (mm):

Debelina folije t (mm):

Masa folije m (g):

Preglednica 1: Meritve na nosilcu dolžine L (mm) =

	s (mm) =	s (mm) =	s (mm) =	s (mm) =
x (mm)				
y (mm)				

Preglednica 2: Meritve na nosilcu dolžine L (mm) =

	s (mm) =	s (mm) =	s (mm) =	s (mm) =
x (mm)				
y (mm)				

Rezultati izračunov:

Gostota folije ρ (kg/m³):

Zvezno porazdeljena obremenitev q_0 (N/m):

Youngov modul folije E (MPa):

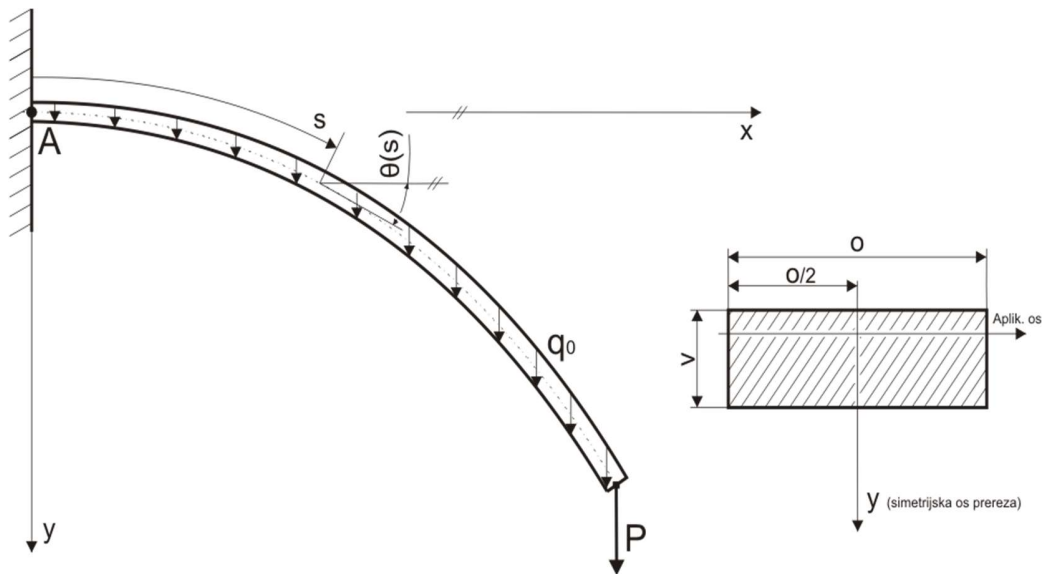
Izpeljava (tega dela ni nujno potrebno imeti na vajah):

a) Ravnotežje zunanjih sil

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo na mesto konzolnega vpetja (Slika 1). Da je izpolnjen pogoj ravninskega nosilca, mora os y pri tem predstavljati simetrijsko os prečnega prereza. Zaradi ravninskega obremenjevanja in simetričnosti prereza bo koordinatna os y tudi pri deformiranem stanju nosilca tako vedno predstavljala simetralo vsakega prečnega prereza po osi nosilca. Po vertikali postavimo izhodišče koordinatnega sistema na položaj nevtralne osi v točki vpetja. Natančen položaj nevtralne osi glede na prerez nosilca nas trenutno še ne zanima.

Vpeljemo ločno koordinato s ($0 \leq s \leq L$), ki poteka vzdolž deformirane nevtralne osi nosilca v smeri od vpetega proti prostemu koncu, kot prikazuje Slika 1. Izhodišče koordinate s se nahaja v izhodišču koordinatnega sistema xy , zaradi preglednosti pa je narisana zamaknjeno glede na nevtralno os.

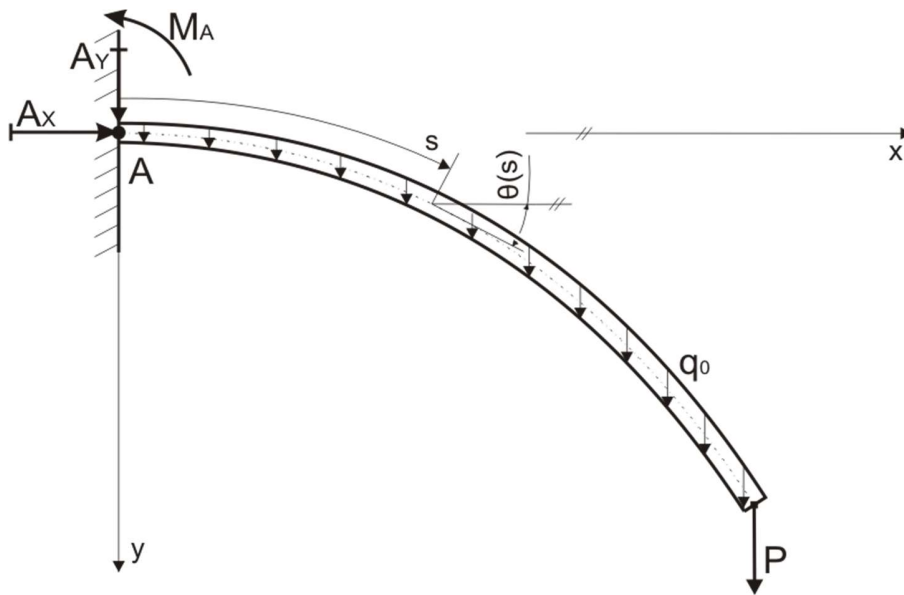
Definiramo še kot $\theta(s)$, ki naj bo kot med pozitivno smerjo koordinatne osi x ter tangento na nevtralno os v točki, dani z ločno koordinato s . Ker upoštevamo predpostavko, da prerezi, ki so v nedeformiranem stanju nosilca pravokotni na nevtralno os, ohranjajo to pravokotnost tudi med deformiranjem, predstavlja kot $\theta(s)$ zasuk takega prereza v deformiranem stanju. Kako pomemben je kot $\theta(s)$ bo razvidno iz nadaljnje obravnave, saj bo predstavljal primarno spremenljivko vodilne diferencialne enačbe upogiba. S poznavanjem kota $\theta(s)$ je upogibno deformacijsko stanje nosilca popolnoma določeno.



Slika 1: deformiranje nosilca, koordinatni sistem in položaj koordinatne osi y glede na prečni prerez nosilca.

Zunanje obremenitve nosilca, ki jih predstavljata zvezna obtežba q_0 in točkovna sila P na prostem koncu, povzročajo reakcijske sile na mestu vpetja, ki jih želimo izračunati. Mesto vpetja je označeno kot točka A.

Skladno z obravnavo upogiba po teoriji velikih premikov moramo ravnotežne enačbe tvoriti na deformiranem sistemu (Slika 2).



Slika 2: ravnotežje zunanjih obremenitev na deformiranem nosilcu.

Na osnovi Slike 2 zapišemo ravnotežne enačbe zunanjih sil:

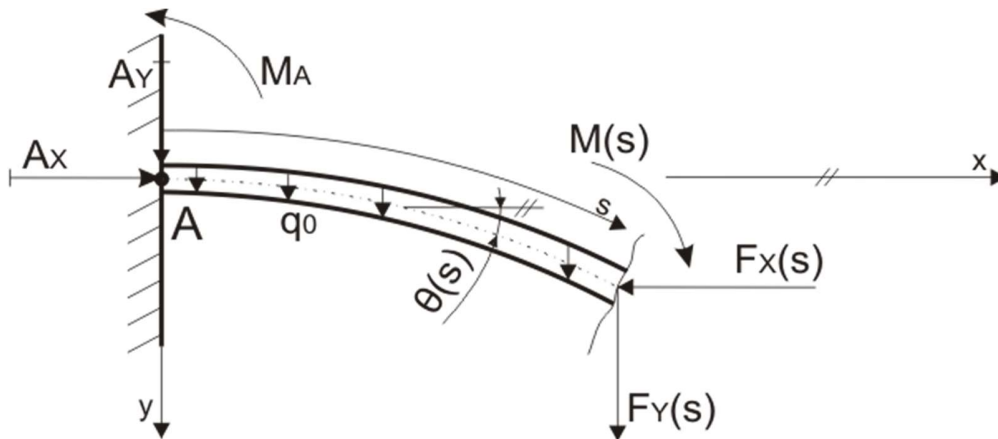
$$\sum_i F_{ix} = 0: A_x = 0 \Rightarrow A_x = 0, \quad (1)$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: A_y + P + \int_0^L q(s) \cdot ds = 0 \Rightarrow A_y = -P - \int_0^L q_0 \cdot ds = -P - q_0 \cdot L. \quad (2)$$

Tretje reakcije v točki vpetja, momenta M_A , ne moremo določiti brez poznavanja deformirane oblike nosilca.

b) Določitev notranjih veličin stanja

Podobno kot pri zapisu enačb ravnotežja zunanij sil, tudi tu enačbe tvorimo za deformirano stanje nosilca. Notranjo silo v smeri koordinatne osi x označimo kot $F_X(s)$, tisto v smeri koordinatne osi y pa $F_Y(s)$. $M(s)$ predstavlja notranji moment nosilca. Na Sliki 3 so predstavljene izbrane pozitivne usmerjenosti opisanih veličin v poljubni točki, dani z ločno koordinato s .



Slika 3: notranje obremenitve nosilca.

Na osnovi Slike 3 zapišemo ravnotežne enačbe za določitev notranjih sil:

$$\sum_i F_{ix} = 0: A_x - F_X(s) = 0 \Rightarrow F_X(s) = A_x,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: F_Y(s) + A_y + \int_0^s q(s) \cdot ds = 0 \Rightarrow F_Y(s) = -A_y - \int_0^s q_0 \cdot ds.$$

Ob upoštevanju enačb (1) in (2) dobimo za notranje sile naslednje rezultate:

$$F_Y(s) = -A_y - \int_0^s q_0 \cdot ds = P + q_0 \cdot L - q_0 \cdot s = P + q_0 \cdot (L - s), \quad (3)$$

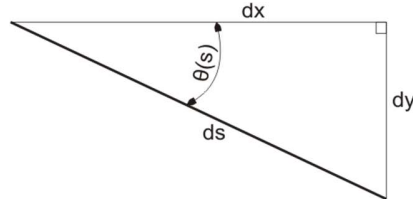
$$F_X(s) = A_x = 0. \quad (4)$$

Notranjega momenta $M(s)$, podobno kot reakcijskega momenta v podpori M_A , ne moremo določiti brez poznavanja deformirane oblike nosilca, tako da nam iz ravnotežnih enačb postanejo znane le velikosti notranjih sil $F_X(s)$ in $F_Y(s)$.

c) Ravnotežje obremenitev na diferencialno majhnem delčku nosilca

Na poljubnem mestu nosilca izberemo diferencialno majhen delček nevtralne osi dolžine ds . Ker je obravnavani del infinitezimalno majhen, lahko privzamemo, da je na dolžini ds raven, čeprav je dejansko del loka, ki ga določa koordinata s .

Preko $\theta(s)$, ki predstavlja kot med pozitivno smerjo koordinatne osi x ter tangento na deformirano nevtralno os pri koordinati s , lahko s pomočjo Slike 4 poiščemo zvezo med dolžino ds in pripadajočimi prirastki vertikalnih in horizontalnih premikov nosilca v smeri koordinatnih osi y in x , dy in dx , na dolžini ds .



Slika 4: diferencialno majhen delček nosilca ds .

Na osnovi Slike 4 zapišemo naslednje (geometrijske) enačbe:

$$\cos(\theta(s)) = \frac{dx}{ds}, \quad (5)$$

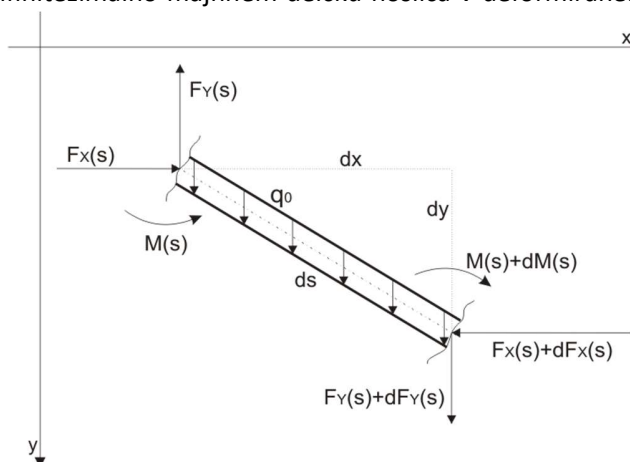
$$\sin(\theta(s)) = \frac{dy}{ds}, \quad (6)$$

$$\tan(\theta(s)) = \frac{dy}{dx}, \quad (7)$$

z uporabo Pitagorovega izreka pa lahko zapišemo tudi:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2. \quad (8)$$

Ravnotežne enačbe na infinitezimalno majhnem delčku nosilca v deformiranem stanju zapišemo na osnovi Slike 5:



Slika 5: ravnotežje obremenitev na delčku nosilca ds .

$$\sum_i F_{ix} = 0: F_X(s) + dF_X(s) - F_X(s) = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0: F_Y(s) + dF_Y(s) - F_Y(s) + q_0 \cdot ds = 0$$

$$\sum_i M_i = 0: M(s) + dM(s) - M(s) + F_X(s) \cdot dy + F_Y(s) \cdot dx - q_0 \cdot ds \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

Ob upoštevanju enačb za velikost notranjih sil, (3) in (4), ter zanemaritvi zadnjega člena v enačbi ravnotežja momentov (ki je majhen v primerjavi z ostali členi), dobimo naslednje enačbe:

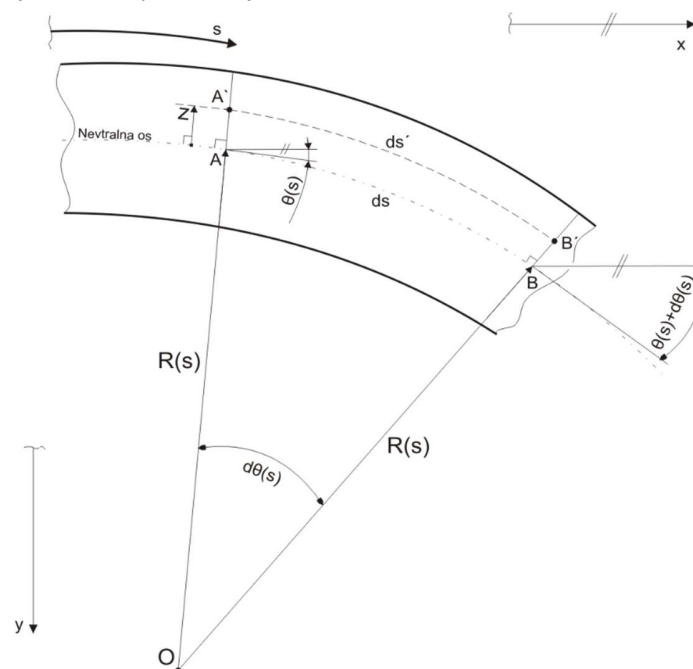
$$dF_X(s) = 0, \quad (9)$$

$$dF_Y(s) = -q_0 \cdot ds, \quad (10)$$

$$dM(s) = -F_X(s) \cdot dy - F_Y(s) \cdot dx = -(P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot dx. \quad (11)$$

d) Ukrivljenost in specifične deformacije nosilca

Položaj nevtralne osi, na kateri so napetosti in s tem tudi specifične deformacije zaradi notranjega upogibnega momenta enake nič, naj bo zaenkrat povsem poljuben. Bernoulli-jeva hipoteza, katero privzamemo kot eno od predpostavk pri reševanju našega problema, pravi, da prerezi, ki so v nedeformiranem stanju plani in pravokotni na nevtralno os, ohranjajo planost in pravokotnost na nevtralno os tudi v deformiranem stanju. Če torej predpostavimo, da se infinitezimalno majhen delček nevtralne osi ds ukrivi po krožnem loku s polmerom $R(s)$ dobimo model deformiranja nosilca, predstavljen na Sliki 6.



Slika 6: deformiranje nosilca.

Točki A in B na nevtralni osi omeujeta dolžino ds , sečišče normal na tangenti nevtralne osi v teh dveh točkah pa določa center radija ukrivljenosti $R(s)$ delčka ds . Kot med omenjenima normalama znaša $d\theta(s)$ in predstavlja prirastek kota $\theta(s)$ na dolžini ds . Dolžina delčka ds (na Sliki 6 dolžina loka nevtralne osi med točkama A in B) znaša:

$$ds = R(s) \cdot d\theta(s). \quad (12)$$

Ukrivljenost definiramo kot recipročno vrednost polmera $R(s)$:

$$\rho(s) = \frac{1}{R(s)} = \frac{d\theta(s)}{ds}. \quad (13)$$

Ob upoštevanju zveze med dx in dy , po enačbi (7), lahko naprej zapišemo:

$$\rho(s) = \frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{d\left(\arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)}{ds} = \frac{d(\arctan(y'))}{ds} = \frac{d(\arctan(y'))}{ds} \cdot \frac{dx}{dx}, \quad (14)$$

po enačbi (8) pa velja tudi:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left(dx^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = dx \cdot (1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{ds}{dx} = (1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Nazadnje enačbo (15) vstavimo v enačbo (14):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\arctan(y')}{ds} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{\arctan(y')}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\arctan(y')}{dx} \cdot \frac{1}{(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \rho &= \frac{\arctan(y')}{dx} \cdot \frac{1}{(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 + (y')^2)} \cdot \frac{y''}{1} \cdot \frac{1}{(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Dobljeni izraz (16) imenujemo tudi enačba ukrivljenosti.

Na Sliki 6 si oglejmo še stanje specifičnih deformacij po prerezu nosilca. Specifična deformacija je v splošnem definirana kot kvocient spremembe dolžine Δl in začetne dolžine l_0 :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (17)$$

Nevtralna os se pri čistem upogibnem deformiranju upogne brez da bi se pri tem spremenila njena dolžina. Prerezi, ki so bili pred deformiranjem pravokotni na nevtralno os, pa ostanejo tudi v deformiranem stanju pravokotni nanjo. Poglejmo si prereza na Sliki 6, ki omejujeta delček nevtralne osi ds ; prvi poteka skozi točki A in A', drugi pa skozi točki B in B', pri čemer sta oba pravokotna na nevtralno os. Vsa vlakna, ki ležijo med tema dvema prerezoma in so vzporedna z nevtralno osjo, so imela v nedeformiranem stanju, ko je radij ukrivljenosti neskončno velik, enako dolžino. Ker nevtralna os ne spreminja dolžine med deformiranjem, to pomeni, da predstavlja dolžina ds začetno dolžino vseh vlaken med omenjenima prerezoma. Za nadaljnjo obravnavo vpeljemo novo koordinato z , ki ima izhodišče na nevtralni osi in v poljubnem prerezu poteka pravokotno na nevtralno os ter kaže radialno navzven po radiju ukrivljenosti, kot prikazuje Slika 6. Izberemo si vlakno na poljubni oddaljenosti z od nevtralne osi, ki poteka vzporedno z nevtralno osjo od točke A' do točke B' (po Sliki 6). Deformirano dolžino tega vlakna označimo z ds' :

$$ds' = (R(s) + z) \cdot d\theta(s). \quad (18)$$

Relativno deformacijo vlakna izračunamo s pomočjo enačb (12), (17) in (18):

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(R(s) + z) \cdot d\theta(s) - R(s) \cdot d\theta(s)}{R(s) \cdot d\theta(s)} = \frac{z}{R(s)},$$

$$\varepsilon = \frac{z}{R(s)} = \rho(s) \cdot z. \quad (19)$$

Enačba (19) nam pove, da je relativna deformacija ε vlaken v deformiranem stanju sorazmerna ukrivljenosti nosilca na mestu, podanem z ločno koordinato s , ter da je na tem mestu linearna funkcija pravokotne oddaljenosti vlakna od nevtralne osi, ki jo predstavlja koordinata z .

e) Hooke-ov material

Linearno elastičen ali Hooke-ov imenujemo tisti material, ki v območju elastičnih deformacij izkazuje premosorazmerno povezavo med napetostjo in deformacijo. Če temperaturnih obremenitev ne upoštevamo, se v primeru splošnega napetostno-deformacijskega stanja to zvezo (Hooke-ov zakon) lahko zapiše kot:

$$\sigma_{ij} = 2 \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \varepsilon_{ij} + \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij}, \quad (20)$$

- σ_{ij} napetostni tenzor,
- ε_{ij} deformacijski tenzor,
- E materialni parameter (Youngov modul, modul elastičnosti),
- ν materialni parameter (Poisson-ov količnik).

Ko imamo enoosno, normalno napetostno stanje in opazujemo deformacije le v smeri delovanja napetosti, pa dobimo precej enostavnejši izraz:

$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \varepsilon_{xx} + \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}),$$

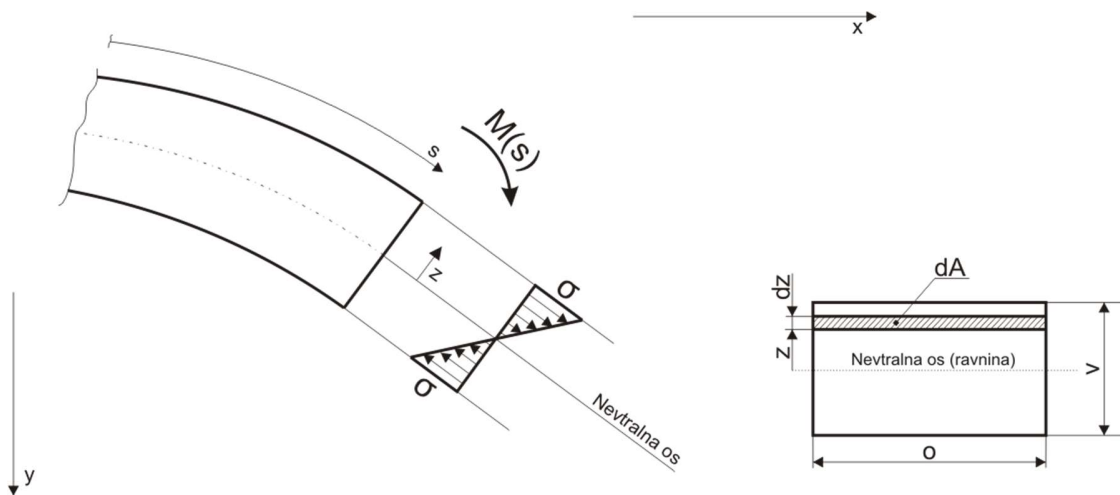
$$\sigma_{xx} = 2 \cdot \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot \varepsilon_{xx} + \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx} \right), \dots$$

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (21)$$

- σ normalna napetost,
- ε relativna deformacija v smeri delovanja normalne napetosti.

f) Zveza med notranjim momentom in deformacijo nosilca

Določiti želimo zvezo med deformacijo nosilca in velikostjo notranjega upogibnega momenta. Upogibno deformiranje smo si že ogledali in ugotovili, da je na določenem mestu nosilca, ob koordinati s , velikost relativne deformacije odvisna od ukrivljenosti $\rho(s)$ ter pravokotne oddaljenosti vlakna z od nevtralne osi, v skladu z enačbo (19). V nadaljevanju iščemo enačbo, ki povezuje notranji moment z ukrivljenostjo nosilca. S tem namenom si oglejmo stanje deformacij in napetosti na poljubno izbranem prečnem prerezu nosilca v deformiranem stanju, ki je prikazano na Sliki 7.



Slika 7: napetosti v prerezu za primer Hooke-ovega materiala.

Vemo, da je relativna deformacija porazdeljena linearno po višini prereza (po velikosti sorazmerna koordinati z), kar naprej pomeni, da ob uporabi Hooke-ovega zakona (21) dobimo relativni deformaciji sorazmerno, linearno porazdelitev napetosti po prerezu. Sila, ki deluje na diferencialno majhen delček prereza dA , znaša:

$$dF = \sigma \cdot dA. \quad (22)$$

Zatem izračunamo moment sile dF glede na položaj nevtralne osi:

$$dM = z \cdot dF = \sigma \cdot z \cdot dA, \quad (23)$$

ter končno še celoten moment glede na položaj nevtralne osi:

$$M = \int dM = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA. \quad (24)$$

- A površina prečnega prereza nosilca,
- dA diferencialno majhen delček površine prečnega prereza nosilca.

V zvezo (24) vstavimo enačbo Hooke-ovega zakona (21):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

$$M = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = \int_A E \cdot \varepsilon \cdot z \cdot dA,$$

ter zatem še enačbo relativne deformacije vlaken (19):

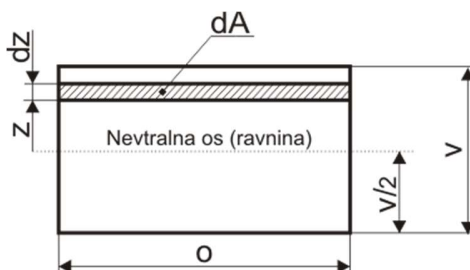
$$\varepsilon = \rho(s) \cdot z,$$

$$M(s) = \int_A E \cdot \rho(s) \cdot z \cdot z \cdot dA = E \cdot \rho(s) \cdot \int_A z^2 \cdot dA. \quad (25)$$

Za dokončen izračun integrala v enačbi (25) potrebujemo relativni položaj nevtralne osi glede na prečni prerez nosilca. Geometrijske lastnosti prereza, način obremenjevanja in napetostno-deformacijsko obnašanje materiala pogojujejo ta položaj, vendar pa je v našem primeru, kjer imamo opravka z ravninskim nosilcem, le zadnji od naštetih vplivov pomemben pri obravnavi problema. Upogibne napetosti ne smejo imeti druge rezultante kot le notranji upogibni moment (ne smejo povzročati notranjih osnih sil). Dodatna enačba, s pomočjo katere v splošnem določimo lego nevtralne osi, se tako glasi:

$$N(s) = \int_A dF = \int_A \sigma \cdot dA = 0.$$

Za naš primer oblike nosilca, načina obremenjevanja ter lastnosti materiala (enaka napetostno-deformacijska funkcija v nateznem in tlačnem področju), nevtralna os leži v težiščni osi prečnega prereza nosilca, kot prikazuje Slika 8.



Slika 8: položaj nevtralne osi za naš primer nosilca (ob enakem obnašanju materiala v nategu in tlaku po H. zakonu).

Integralni izraz v enačbi (25) predstavlja težiščni vztrajnostni moment prereza okoli horizontalne težiščne osi, ki ga označimo z I . Ob upoštevanju dimenzij prereza lahko izračunamo:

$$I = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-v/2}^{v/2} z^2 \cdot o \cdot dz = o \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{v}{2} \right)^3 - \left(-\frac{v}{2} \right)^3 \right),$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot o \cdot v^3. \quad (26)$$

Vrnemo se v enačbo momenta (25):

$$M(s) = E \cdot \rho(s) \cdot \int_A z^2 \cdot dA = E \cdot \rho(s) \cdot I,$$

$$\rho(s) = \frac{M(s)}{E \cdot I}. \quad (27)$$

Po enačbi (27) je ukrivljenost $\rho(s)$ premosorazmerna notranjemu upogibnemu momentu in odvisna od materialnih lastnosti (E) ter geometrijskih lastnosti prereza (I).

g) Vodilna diferencialna enačba

Vodilno diferencialno enačbo izpeljemo s pomočjo enačbe ravnotežja momentov na diferencialno majhen delček nosilca (11) in enačbe zveze ukrivljenosti z notranjim momentom (27):

$$dM(s) + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot dx = 0,$$

$$M(s) = \rho(s) \cdot E \cdot I.$$

Enačbo ravnotežja momentov delimo z ds :

$$dM(s) + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot dx = 0 \quad / \cdot \frac{1}{ds},$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \frac{dx}{ds} = 0,$$

in upoštevamo zvezo (5):

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\theta(s)),$$

$$\frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \cos(\theta(s)) = 0. \quad (28)$$

V enačbo (27), ki povezuje notranji moment z ukrivljenostjo, vstavimo enačbo (13), ki podaja zvezo med ukrivljenostjo $\rho(s)$ in odvodom $\theta(s)$:

$$\rho(s) = \frac{d\theta(s)}{ds},$$

$$M(s) = \rho(s) \cdot E \cdot I = \frac{d\theta(s)}{ds} \cdot E \cdot I,$$

zadnjo enačbo enkrat odvajamo po s :

$$\frac{dM(s)}{ds} = \frac{d(\rho(s) \cdot E \cdot I)}{ds} = \frac{d(\rho(s))}{ds} \cdot E \cdot I = \frac{d^2\theta(s)}{ds^2} \cdot E \cdot I,$$

ter nazadnje rezultat vstavimo v (28):

$$\frac{dM(s)}{ds} + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \cos(\theta(s)) = 0,$$

$$\frac{d^2\theta(s)}{ds^2} \cdot E \cdot I + (P + q_0 \cdot (L - s)) \cdot \cos(\theta(s)) = 0 \quad (29)$$

Dobimo diferencialno enačbo drugega reda, v kateri kot primarna spremenljivka nastopa kot $\theta(s)$. Za rešitev diferencialne enačbe drugega reda potrebujemo dva robna pogoja, ki se navezujeta na robne vrednosti primarne spremenljivke ali pa na robne vrednosti prvega odvoda primarne spremenljivke. Prvi robni pogoj za naš primer dobimo preko načina vpetja nosilca. Za konzolno vpetje pri $s = 0$ velja:

$$\theta(0) = 0.$$

Iz velikosti notranjega momenta na prostem koncu nosilca dobimo še drugi robni pogoj:

$$M(L) = \rho(L) \cdot E \cdot I = \frac{d\theta}{ds}(L) \cdot E \cdot I = 0,$$

$$\frac{d\theta}{ds}(L) = 0.$$

Z rešitvijo diferencialne enačbe (29) ob pripadajočih robnih pogojih, je oblika nevtralne osi deformiranega nosilca popolnoma določena. S pomočjo enačb (5) in (6) namreč lahko ob poznavanju rešitve $\theta(s)$ izračunamo vrednosti pomikov $x(s)$ in $y(s)$:

$$\cos(\theta(s)) = \frac{dx}{ds},$$

$$dx = \cos(\theta(s)) \cdot ds \Rightarrow x(s) = \int_0^s \cos(\theta(s)) \cdot ds, \text{ robni pogoj } x(s=0) = 0,$$

$$\sin(\theta(s)) = \frac{dy}{ds},$$

$$dy = \sin(\theta(s)) \cdot ds \Rightarrow y(s) = \int_0^s \sin(\theta(s)) \cdot ds, \text{ robni pogoj } y(s=0) = 0.$$