

Velike deformacije kroglastih, natezno obremenjenih lupin

Obravnavamo velike deformacije tankih lupin kroglaste oblike, izdelanih iz nelinearno elastičnega materiala in obremenjenih z notranjim nadtlakom. V praksi lahko s takšnim modelom obravnavamo napihovanje balonov in deformacije nekaterih bioloških tkiv.

1. Materialni model

Za opis nelinearne zveze med napetostnim in deformacijskim stanjem bomo uporabili Mooney-Rivlin-ov dvo-parametrični model, po katerem Cauchy-jeve napetosti v materialu izračunamo s pomočjo sledečega izraza [1]:

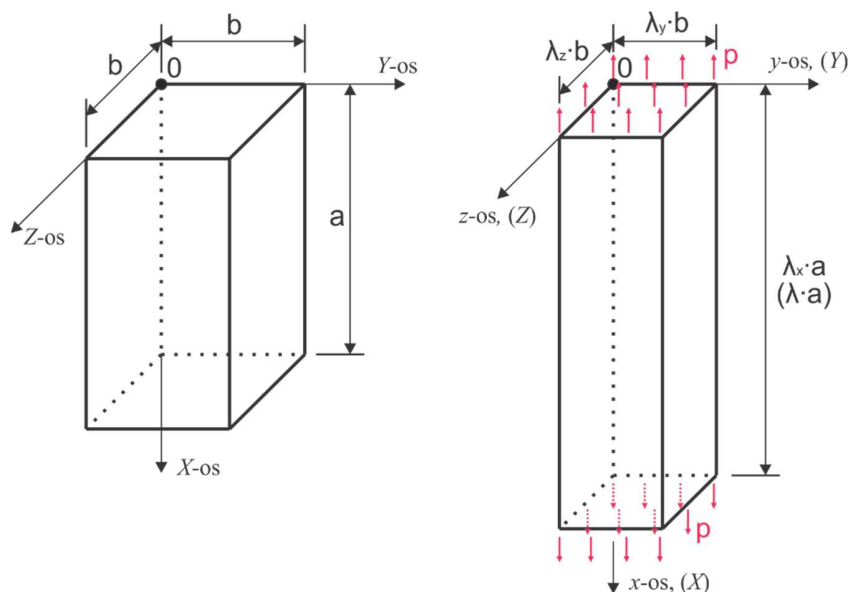
$$\boldsymbol{\sigma} = 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} + \eta\mathbf{I} \quad (1)$$

Mooney-Rivlin-ov model se pogosto uporablja za naravne gume in gumam podobne elastomere. V zgornji zvezi nastopajo trije materialni parametri (C_1, C_2, η), \mathbf{I} je identična matrika, \mathbf{B} pa funkcija deformacijskega gradienta \mathbf{F} po enačbi:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} \quad (2)$$

2. Enoosni preizkus nestisljivega materiala

Poglejmo si primer enoosnega nateznega preizkusa na epruveti kvadratnega prereza (Slika 1). Epruveto preko obremenjevanja z napetostnim vektorjem p raztegujemo v smeri osi X . Postavimo si koordinatni sistem v nedeformiranem stanju (X, Y, Z) in koordinatni sistem v deformiranem stanju (x, y, z). Koordinatna sistema si lahko izberemo tako, da sovpadata.



Slika 1: enoosno razteganje preizkušanca kvadratnega prereza.

Razmerje med končno in začetno dolžino epruvete v smeri osi X , Y in Z označimo z λ_x , λ_y in λ_z (λ navadno imenujemo »razteg«). Očitno je, da sta v prečnih smereh (Y in Z) raztega enaka:

$$\lambda_y = \lambda_z \quad (3)$$

Ker obravnavamo nestisljiv material mora veljati tudi (volumen nestisljivega materiala se pri deformiranju ne spreminja):

$$a \cdot b \cdot b = a\lambda_x \cdot b\lambda_y \cdot b\lambda_z \rightarrow \lambda_x \cdot \lambda_y \cdot \lambda_z = 1 \quad (4)$$

Za razteg v smeri obremenjevanja epruvete (X), bomo od tu naprej uporabili kar oznako λ brez indeksov:

$$\lambda_x = \lambda \quad (5)$$

Iz enačb (3), (4) in (5) lahko izrazimo raztega v prečnih smereh z raztegom v smeri osi X :

$$\lambda_x \cdot \lambda_y \cdot \lambda_z = \lambda \cdot \lambda_y \cdot \lambda_z = \lambda \cdot \lambda_y \cdot \lambda_y = 1 \rightarrow \lambda_y = \lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (6)$$

Končni položaj točk v deformiranem stanju v odvisnosti od njihovega začetnega položaja lahko zapišemo s pomočjo raztegov. Točka, ki ima v nedeformiranem stanju koordinate (X, Y, Z) se v deformiranem stanju premakne na položaj:

$$x = \lambda_x \cdot X = \lambda \cdot X, \quad y = \lambda_y \cdot Y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot Y, \quad z = \lambda_z \cdot Y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot Z \quad (7)$$

Iz enačb (7) lahko izračunamo komponente deformacijskega gradienta:

$$(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} = (\mathbf{F}^T)$$

Iz enačb (1) in (2) potem sledi:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} + \eta\mathbf{I}$$

$$(\mathbf{B}) = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{B}^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2C_1 \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} - 2C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx} = 2C_1\lambda^2 - 2C_2\frac{1}{\lambda^2} + \eta \quad (8)$$

$$\sigma_{yy} = 2C_1\frac{1}{\lambda} - 2C_2\lambda + \eta \quad (9)$$

$$\sigma_{zz} = 2C_1\frac{1}{\lambda} - 2C_2\lambda + \eta \quad (10)$$

Če od enačbe (8) odštejemo enačbo (9) dobimo:

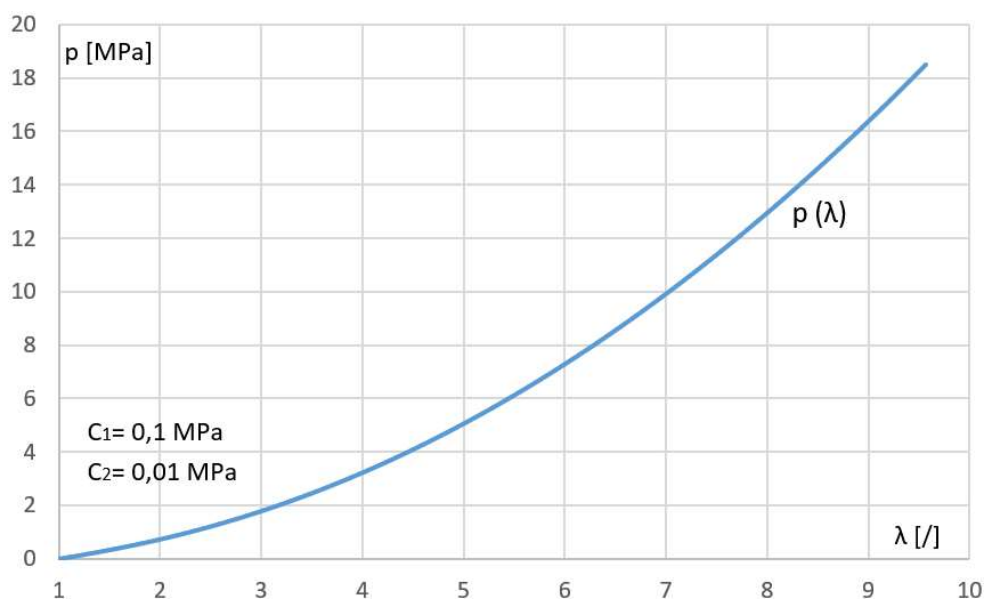
$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2C_1\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) \quad (11)$$

Za komponente napetostnega tenzorja v deformiranem stanju pri enoosnem preizkusu velja:

$$(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

od koder končno dobimo:

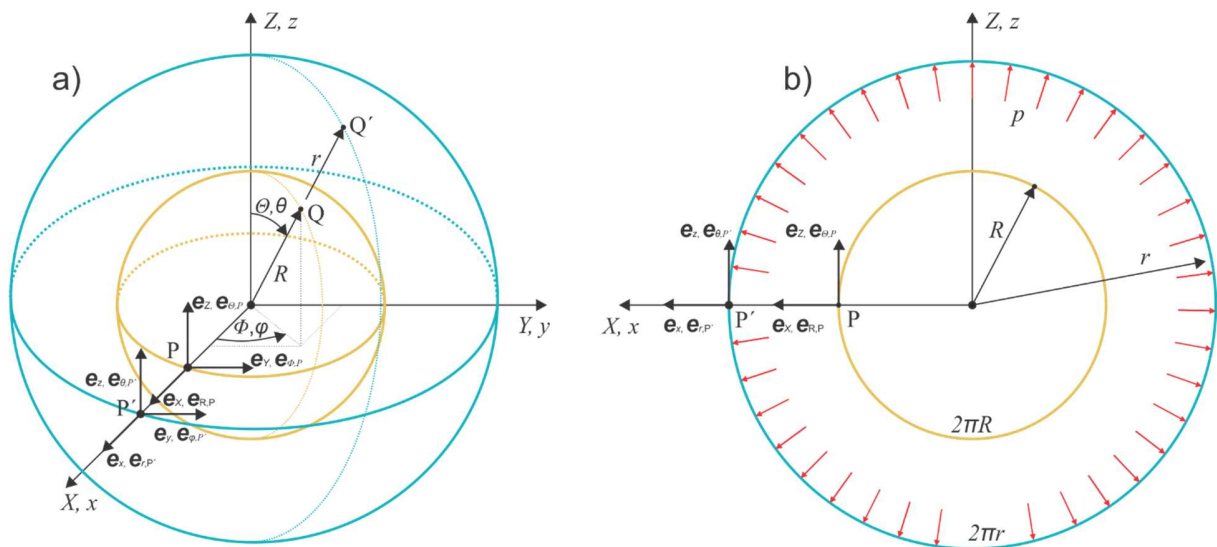
$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma_{xx} = p = 2C_1\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right) - 2C_2\left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda\right) \quad (12)$$



Slika 2: primer nelinearne $p(\lambda)$ krivulje pri enoosnem preizkusu.

3. Model deformiranja balona – tanka votla krogla, obremenjena z notranjim nadtlakom

Balon bomo modelirali kot geometrijsko idealno votlo kroglo, ki se pri napihovanju preslika/deformira zopet v idealno kroglo le z večjim premerom (Slika 3; rumena barva – nedeformiran balon, modra barva – deformiran balon). Ko balon napihujemo, se v njem spreminja nadtlak p , kar bomo poskusili matematično opisati. Kartezični koordinatni sistem v nedeformiranem stanju (X, Y, Z) se ujema s tistim v deformiranem stanju (x, y, z) . Isto velja za krogelna koordinatna sistema v nedeformiranem (R, Φ, θ) in deformiranem stanju (r, φ, θ) . Ker se točke v telesu premikajo v samo v radialni smeri, za položaj vseh točk velja $\Phi = \varphi$ in $\theta = \theta$.



Slika 3: model deformiranja balona: a) v 3D-prostoru in b) v ravnini xz z označenim notranjim nadtlakom p .

Izberemo si točko P na površini krogla na mestu, kjer smeri enotskih vektorjev krogelnega koordinatnega sistema e_R, e_Φ, e_θ sovpadajo s smermi enotskih vektorjev kartezičnega koordinatnega sistema e_X, e_Y, e_Z . V točki P tako velja:

$$e_X = e_{R,P} \quad e_Y = e_{\Phi,P} \quad e_Z = e_{\theta,P} \quad \text{in} \quad e_x = e_{r,P'} \quad e_y = e_{\varphi,P'} \quad e_z = e_{\theta,P'} \quad (13)$$

V primeru homogenega deformacijskega stanja brez strižnih deformacij lahko deformacijski gradient zapišemo kar z raztegi v smereh osi koordinatnega sistema (isto smo naredili za enoosni preizkus, samo na malo daljši način). Ker sta kartezični in krogelni koordinatni sistem v točki P enaka, mora za to točko veljati:

$$(\mathbf{F})_{P'} = \begin{pmatrix} \lambda_{x,P'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{y,P'} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z,P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r,P'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\varphi,P'} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\theta,P'} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Spomnimo se, da razteg v neki smeri predstavlja razmerje med končno in začetno dolžino vlaken v tej smeri. Raztege v cirkumferenčnih smereh (φ in θ) lahko tako izračunamo iz razmerja med končnim in začetnim obsegom (Slika 3). V točki P oz. P' tako dobimo:

$$\lambda_{\varphi,P'} = \lambda_{y,P'} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R} = \lambda \quad \text{in} \quad \lambda_{\theta,P'} = \lambda_{z,P'} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R} = \lambda \quad (15)$$

Za razteg v radialni smeri pa iz nestisljivosti materiala sledi:

$$\lambda_{r,P'} \cdot \lambda_{\varphi,P'} \cdot \lambda_{\theta,P'} = 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_{r,P'} = \frac{1}{\lambda_{\varphi,P'} \cdot \lambda_{\theta,P'}} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (16)$$

Deformacijski gradient v točki P' je tako:

$$(\mathbf{F})_{P'} = \begin{pmatrix} \lambda_{x,P'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{y,P'} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{z,P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r,P'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\varphi,P'} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\theta,P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (17)$$

V našem (simetričnem) primeru vse točke v telesu »občutijo« enako deformacijsko stanje kot točka P'. Za deformacijski gradient v celotni krogli v krogelnem koordinatnem sistemu tako velja:

$$(\mathbf{F}) = (\mathbf{F})_{P'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{! razen v točki P} \quad (18)$$

Iz enačb (1) in (2) dobimo:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2C_1\mathbf{B} - 2C_2\mathbf{B}^{-1} + \eta\mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{rr} = 2C_1\lambda^{-4} - 2C_2\lambda^4 + \eta \quad (19)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2C_1\lambda^2 - 2C_2\lambda^{-2} + \eta \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2C_1\lambda^2 - 2C_2\lambda^{-2} + \eta \quad (21)$$

Ravnovesne enačbe statike v sferičnem koordinatnem sistemu ob odsotnosti strižnih napetosti se glasijo [2]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cot \theta = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta} = 0 \quad (24)$$

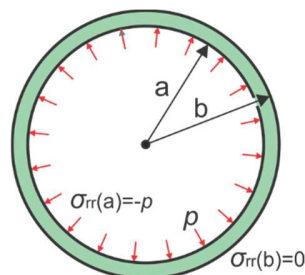
Ker sta normalni napetosti v cirkularnih smereh enaki ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$), vsi odvodi v cirkularnih smereh pa enaki 0 (oboje sledi iz simetrije), moramo izpolniti samo še enačbo (22):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

V zgornji izraz vstavimo zveze (22) do (24) in dobimo:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(2C_1(\lambda^{-4} - \lambda^2) + 2C_2(\lambda^{-2} - \lambda^4)) = 0$$

$$\partial \sigma_{rr} = -\frac{4}{r}(C_1(\lambda^{-4} - \lambda^2) + C_2(\lambda^{-2} - \lambda^4))\partial r$$



Z integriranjem zgornje enačbe po debelini stene v deformiranem stanju dobimo razliko med normalnimi napetostmi v radialni smeri na zunanji in notranji steni krogle, ki je ravno enaka p :

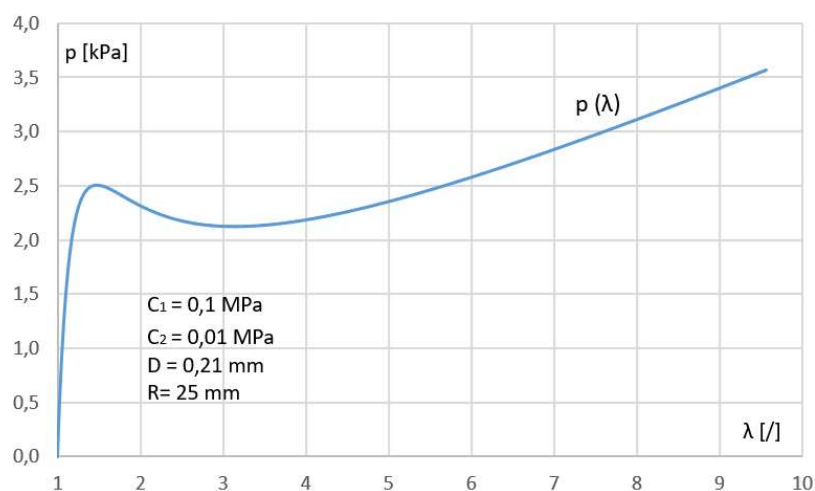
$$\int_a^b \partial \sigma_{rr} = - \int_a^b \frac{4}{r}(C_1(\lambda^{-4} - \lambda^2) + C_2(\lambda^{-2} - \lambda^4)) dr$$

$$\sigma_{rr}(b) - \sigma_{rr}(a) = p = - \int_a^b \frac{4}{r}(C_1(\lambda^{-4} - \lambda^2) + C_2(\lambda^{-2} - \lambda^4)) dr$$

Ob upoštevanju, da je stena balona tanka, se zgornji integral poenostavi v končno enačbo:

$$p = 4\delta (C_1(\lambda^{-1} - \lambda^{-7}) + C_2(\lambda - \lambda^{-5}))$$

$$\delta = \frac{D}{R} \text{ (razmerje med debelino stene krogle in radijem krogle v nedeformiranem stanju)}$$



Slika 4: primer $p(\lambda)$ krivulje pri napihovanju balona.

[1] Mangan R. in Destrade M. Gent models for the inflation of spherical balloons, International Journal of Non-Linear Mechanics 68, (2015) str. 52-58

[2] Asadi Dalir M. in R. Seifi. Engineering Solid Mechanics 2 (2014), str. 326-327

